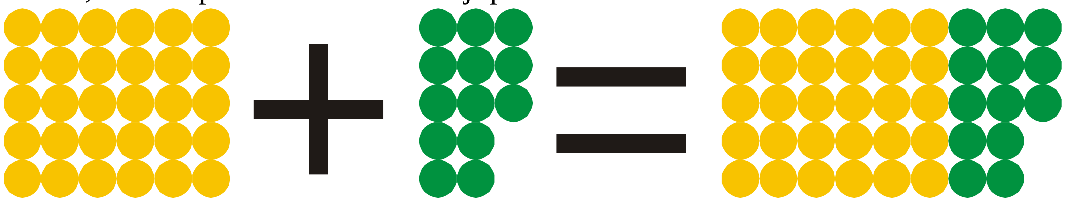
1.3.5 Dělitelnost rozdílu a součinu

Předpoklady: 010304

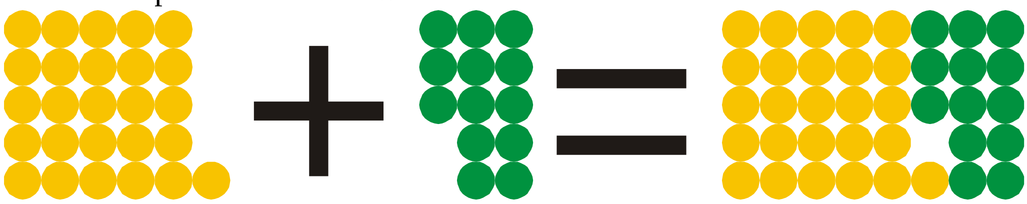
Př. 1: Rozhodni, zda jsou pravdivé následující věty.
a) Pokud sčítáme číslo dělitelné 5 a číslo, které není dělitelné 5, výsledek není dělitelný pěti.
b) Pokud sčítáme dvě čísla, která nejsou dělitelná 5, jejich součet není dělitelný pěti.
Hledej model, kterým bys mohl svůj názor podepřít.

a) Pokud sčítáme číslo dělitelné 5 a číslo, které není dělitelné 5, výsledek není dělitelný pěti.
Zkoušíme: $5+4=9$ $15+7=22$ $55+41=96$, všechny výsledky jsou čísla nedělitelná pěti.
Zdá se, že věta platí. Znázorníme si ji pomocí obdélníků.

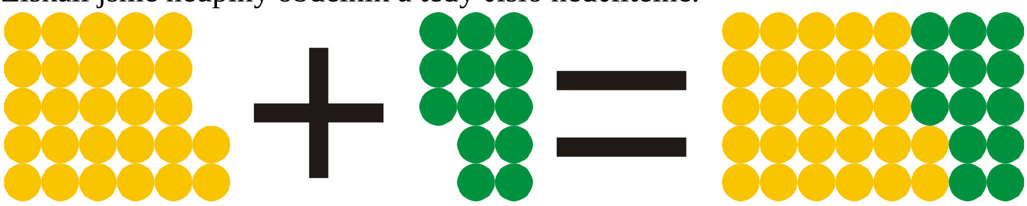


Neúplný obdélník (nedělitelné číslo) spojíme s úplným obdélníkem (dělitelné číslo) $\Rightarrow$ vznikne neúplný obdélník (nedělitelné číslo).

b) Pokud sčítáme dvě čísla, která nejsou dělitelná 5, jejich součet není dělitelný pěti.
Zkoušíme: $3+4=7$ $18+7=25$ $54+43=98$, některé výsledky jsou dělitelné pěti jiné ne $\Rightarrow$ věta není pravdivá (protože tvrdí, že nezískáme dělitelné číslo a my jsme ho někdy přece jen získali).
Znázornění pomocí obdélníků.



Získali jsme neúplný obdélník a tedy číslo nedělitelné.



Získali jsme úplný obdélník a tedy číslo dělitelné pěti.
Z obrázku vidíme, že číslo pěti získáme pokud součet obou zbytků bude pět.

Pedagogická poznámka: Žáci opravdivosti vět nerozhodují úvahou, ale testem na konkrétních číslech. Typicky tak dojde k situaci, že se u bodu a) všichni shodnou na tom, že věta je pravdivá, protože všechny jejich konkrétní testy ji potvrzují.
U bodu b) je velká pravděpodobnost, že někdo ozkouší čísla, ze kterých získá dělitelný součet a proto se názory začnou rozcházet. Někteří žáci dokonce začnou tvrdit, že věta je pravdivá i nepravdivá zároveň.
V diskusi se nejprve musí vyjasnit, že věta je nepravdivá (její tvrzení je obecné,

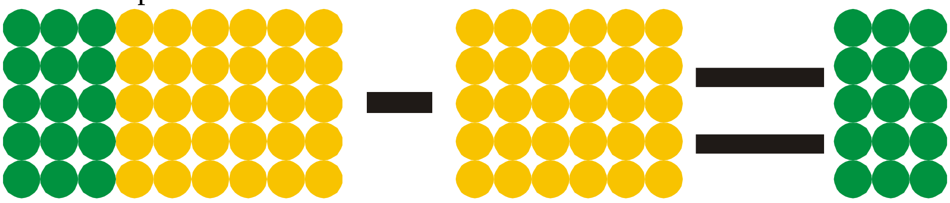
stačí tedy najít jednu dvojici čísel, pro kterou neplatí a tím je dokázáno, že je nepravdivá). Poté se vrátíme k bodu 1) s tím, že zatím jsme žádnou dvojici, která by ji vyvracela nenašli, ale taková dvojice může být třeba velmi vzácná a měli bychom se o pravdivosti přesvědčit lépe. Když se neobjeví žádný nápad, stačí připomenout použití obdélníků v minulé hodině. Pak je možné se opět vrátit k bodu b) a vyvolat diskusi o tom, pro které dvojice čísel věta neplatí (tento úkol je možné zadat nejlepším žákům u předtím).

Př. 2: Operací, která je velmi podobná sčítání, je odčítání. Jak by mohlo znít pravidlo o dělitelnosti rozdílu? Platí toto pravidlo?

Pokud od čísla dělitelného například pěti odečteme číslo dělitelné pěti, je výsledek dělitelný pěti.

$45-10=35$ $50-5=45$ $155-45=105$ $\Rightarrow$ zdá se, že věta platí.

Zobrazení pomocí obdélníků:



Při odečítání čísla dělitelného odebereme z obdélníku několik sloupců, získáme tak další kompletní obdélník.

Pokud odčítáme čísla dělitelná daným číslem, je daným číslem dělitelný i jejich rozdíl.

Př. 3: Dokaž, že zadané číslo je dělitelné číslem v závorce bez dělení tím, že číslo vyjádříš jako vhodný rozdíl.

a) $801 \quad \{9\}$ b) $2967 \quad \{3\}$ c) $203 \quad \{7\}$ d) $1001 \quad \{11\}$
e) $5982 \quad \{3\}$ f) $3956 \quad \{4\}$ g) $686 \quad \{7\}$ h) $979 \quad \{11\}$

a) $801=900-99 \quad \{9\}$
b) $2967=3000-33 \quad \{3\}$
c) $203=210-7 \quad \{7\}$
d) $1001=1100-99 \quad \{11\}$
e) $5982=6000-18 \quad \{3\}$
f) $3956=4000-44 \quad \{4\}$
g) $686=700-14 \quad \{7\}$
h) $979=990-11 \quad \{11\}$

Pedagogická poznámka: Hledání rozdílů je pro žáky těžší než hledání součtů, proto je třeba dávat větší pozor na to, zda obě čísla v rozdílu jsou evidentně dělitelná.

Př. 4: Kterými čísly je určitě dělitelný součin následujících čísel: $4 \cdot 15 \cdot 7$?

Součin je dělitelný:
4, 15, 7 (původní čísla v součinu),
2, 3, 5, 7 (čísla, kterými jsou dělitelná čísla v součinu),
1, 420 (samozřejmí dělitelé),
6, 10, 12, 14, 20, 21, 289, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210 (čísla, které získáme vzájemným vynásobením původních čísel nebo vynásobením jejich dělitelů).

Pedagogická poznámka: První dvě skupiny najdou žáci určitě, třetí skupinu většinou také. Ze čtvrté skupiny se určitě objeví několik nejmenších čísel, u zbytku záleží na tom, kolik času příkladu věnujete. Každopádně jde o dobrou přípravu na prvočíselný rozklad nebo hledání společného dělitele nebo násobku.

Je-li v součinu několika čísel, alespoň jedno z nich dělitelné daným číslem, je daným číslem dělitelný i výsledný součin.

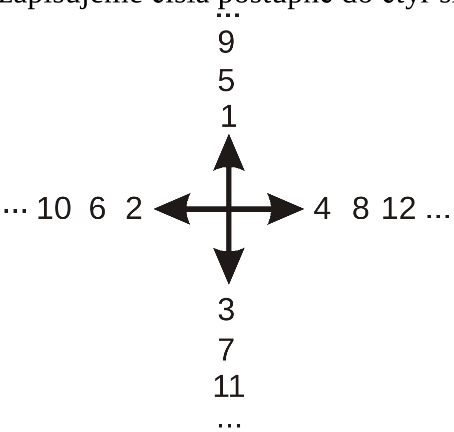
Př. 5: Zvol si dvě libovolná přirozená čísla, která jsou po sobě. Vynásob je a zjistí, zda je výsledek dělitelný 2. Vysvětli.

Například: $3 \cdot 4 = 12$ je dělitelné 2. Jedno z násobených čísel je určitě dělitelné dvěma (každé druhé číslo je dělitelné dvěma) $\Rightarrow$ součin musí být také dělitelný dvěma.

Př. 6: Zvol si tři libovolná přirozená čísla, která jsou po sobě. Vynásob je a zjistí, zda je výsledek dělitelný 6. Vysvětli.

Například: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ je dělitelné 6. Jedno z násobených čísel je určitě dělitelné dvěma (každé druhé číslo je dělitelné dvěma), jedno je dělitelné třema (každé třetí je dělitelné třema) $\Rightarrow$ součin musí být také dělitelný dvěma a třema a tedy i šesti.

Přirozená čísla můžeme uspořádávat různými způsoby. Při jednom takovém uspořádání zapisujeme čísla postupně do čtyř směrů.



Získáme tak počátek spirálovitého rozmístění čísel do čtyř směrů: pravého, horního, levého a dolního.

Př. 7: V obrazci, který jsme získali, je možné najít mnohé zákonitosti a pravidelností. Čísla v každém ze čtyř směrů mají společnou vlastnost. Stejně tak je možné nají společnou vlastnost pro čísla vodorovná a jinou pro čísl svislá. Hledej.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je cvičením na konec hodiny a hlavně jako domácí úkol. Řešení je v následujících hodinách.

Shrnutí: Součin čísel je dělitelný každým z těchto čísel.